ВВЕДЕНИЕ. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ДИСЦИПЛИНЫ

Все математические дисциплины можно условно разделить на *дискретные* и *непрерывные*. Дискретная математика – это та часть математики, главной особенностью которой является изучение отдельных объектов, без привлечения понятия непрерывности, т.е. дискретность – это антипод непрерывности. В дискретной математике отсутствует понятие предельного перехода, присущее классической, «непрерывной» математике. Она занимается изучением дискретных структур, которые возникают как внутри математики, так и в ее приложениях. Однако она зародилась в глубокой древности, раньше, чем непрерывная математика, хотя особую значимость приобрела только в последние десятилетия, в связи с повсеместным внедрением в практику информационных технологий.

Таким образом, в широком смысле дискретная математика включает в себя все разделы математики, в которых не используются топологические методы, в частности понятие непрерывности. Это – все разделы алгебры, математическая логика, почти вся теория чисел (в том числе всевозможные компьютерные арифметики), многие разделы экономико-математических методов, комбинаторика и многие другие дисциплины. В более узком смысле дискретная математика – это те разделы математической логики, алгебры, теории чисел и математической кибернетики, которые непосредственно составляют теоретический фундамент информатики. В этом узком смысле дискретная математика включает в себя теорию булевых функций и их минимизацию, теорию графов и многие разделы теоретической кибернетики, теорию автоматов и формальных грамматик, комбинаторику, теорию алгоритмов (в том числе теорию сложности вычислений), криптографию и теорию кодирования.

Некоторые из вышеперечисленных разделов имеют не только многочисленные «внутренние» (с точки зрения специалиста по информационным системам или вычислительной техники) приложения, используемые, к примеру, при построении различных дискретных устройств, в программировании и т.д., но их результаты и методы применяются также при решении многих нужных для практики задач. Например, при рассмотрении транспортных задач, для нахождения оптимальных решений в управлении, для выделения «узких мест» при планировании и разработке проектов, при составлении оптимальных расписаний, а также при моделировании сложных технологий и процессов различной природы.

Целью изучения дисциплины является ознакомление студентов с системой понятий и некоторыми наиболее важными в приложениях методами теории множеств, математической логики, теории булевых функций и теории графов. Знания и навыки, полученные при ее изучении, используются в дисциплинах: «Информатика», «Программирование», «Структуры и алгоритмы обработки данных в ЭВМ», «Базы данных», «Экспертные и интеллектуальные системы» и т.д. Но в особенности знания по дискретной математике пригодятся при изучении дисциплин, связанных с функциональным и логическим программированием, кодированием и защитой информации.

Основная задача состоит в том, чтобы будущие специалисты чётко освоили основные понятия и приёмы работы с булевыми функциями и графами: построение таблиц значений; поиск и исключение фиктивных переменных; приведение булевых функций к стандартной форме (д.н.ф., к.н.ф., многочлен Жегалкина); основные методы минимизации булевых функций; построение диаграммы (рисунка) графа по его матрицам смежности и инцидентности и обратная задача; установление изоморфизма (одинаковости) графов; определение основных характеристик и свойств графов (векторы степеней, планарность, эйлеровость, гамильтоновость и т.п.); изучение важного частного случая графов – деревьев и их свойств.

За недостатком места о приложениях говорится относительно мало. Однако такие примеры содержатся в литературе.

Данное пособие предназначено в основном для изучения основ именно дискретной математики в узком понимании слова, хотя при этом затронуты основополагающие разделы математической логики – исчисление высказываний и исчисление предикатов. Однако математическую логику настоятельно рекомендуется изучать по более фундаментальным источникам, например, [1, 11,15,16,19,23,29]. В то же время, многие разделы дискретной математики в узком смысле слова в данном пособии никак не отражены, в частности, теория кодирования и криптография, теория алгоритмов и теория сложности вычислений. Это связано, в первую очередь, с ограниченностью отводимого времени для изучения дисциплины в учебных планах у студентов, обучающихся информационным технологиям и использованию вычислительной техники. Курс лекций будет также полезен будущим специалистам по прикладной математике, в частности по математическому и компьютерному моделированию.

Пособие – это существенно поработанный и дополненный вариант пособий [20,21].

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

См. лекции 1-5

ЧАСТЬ ВТОРАЯ. БУЛЕВЫ ФУНКЦИИ И ИХ МИНИМИЗАЦИЯ

См. лекции 6-11

ЧАСТЬ ТРЕТЬЯ. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ГРАФОВ

Графы имеют многочисленные применения в самых различных областях человеческой деятельности. И это естественно, ибо если граф относительно небольшой (размерность задачи маленькая), то мы имеем возможность нарисовать его, точнее изобразить его схему или диаграмму. В этом случае во многих ситуациях задача становится практически понятной. С другой стороны, для работы с большими графами можно с успехом применять ЭВМ. С этой целью разработаны и удобные способы представления графов в ЭВМ, и разнообразные алгоритмы, позволяющие решать широкий круг задач.

11 ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ГРАФОВ

Всюду в этом разделе и почти всюду во всей третьей части мы придерживаемся терминологии из книг [10] и [13].

См. лекцию 12

12 ОБХОДЫ ГРАФОВ. ПЛАНАРНОСТЬ. ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ ДЕРЕВЬЕВ. РАСКРАСКИ

12.1 Эйлеровы и гамильтоновы графы

Для краткости в дальнейшем условимся *путём* (или *цепью*) называть такой маршрут в графе, в котором рёбра не встречаются дважды. Например, в графе G_6 (рисунок 12.1) маршрут $C_1 - C_2 - C_3 - C_1 - C_4 - C_3 - C_1$ путём не является, так как в него ребро C_1C_3 включено дважды. В то же время маршрут $C_1 - C_2 - C_3 - C_1 - C_6 - C_5 - C_4 - C_1$ – это уже путь. Но этот путь *простым* не является, поскольку в нём вершина C_1 встречается дважды.

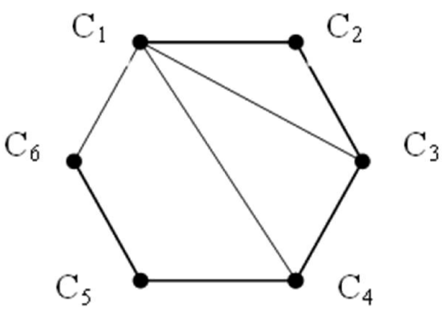


Рисунок 12.1 – Граф G_6

Замечание 12.1 В обоих выше указанных маршрутах вершина C_1 встречается именно дважды, а не трижды, поскольку, описывая маршрут, мы обязаны указать все рёбра по которым он проходит. Поэтому описание циклического маршрута должно начинаться и заканчиваться маркером одной и той же вершины. По этой же причине при указании маршрута в мульти-графе нужно писать между маркерами вершин также и маркеры рёбер во избежание недоразумений. К примеру, для мульти-графа с рисунка 12.2 запись $A_3 - A_4 - A_2$ должна быть дополнена либо до $A_3\ u_1\ A_4\ u_3\ A_2$, либо до $A_3\ u_4\ A_4\ u_3\ A_2$.

12.1.1 *Эйлеровым* путём (обходом) в мульти-графе называется путь, содержащий все рёбра графа, т.е. это такой маршрут, в котором каждое ребро графа встречается ровно один раз (обратите внимание – о вершинах ничего не говорится, таким образом, вершины в любом пути могут попадаться по нескольку раз). Мульти-граф, обладающий эйлеровым путём, называется *эйлеровым*, если к тому же этот путь такой, что его начало совпадает с концом, то мульти-граф называется *эйлеровым циклом*.

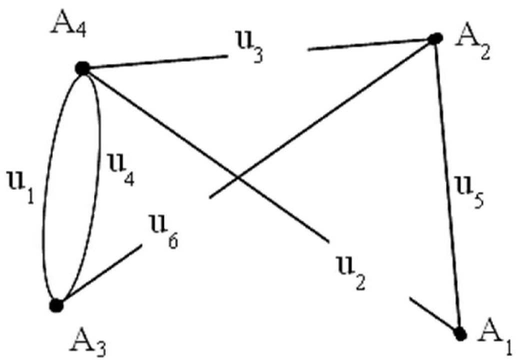


Рисунок 12.2

Примеры 12.1 Граф G_6 с рисунка 12.1 – эйлеров: C_3-C_2-C_1-C_6-C_5-C_4-C_1-C_3-C_4 – его эйлеров обход.

Упражнение 12.1 *Постройте эйлеров обход мульти-графа с рисунка 12.2.*

Упражнение 12.2 *Являются ли этот мульти-граф и граф G_6 эйлеровыми циклами?*

Несложно доказывается

Т е о р е м а 12.1 (критерии эйлеровости)

а). Связный мульти-граф является эйлеровым циклом тогда и только тогда, когда все его вершины имеют чётную степень.

б). В связном мульти-графе имеется эйлеров обход с началом в вершине A и концом в вершине B тогда и только тогда, когда у вершин A и B – степени нечётные, а у всех остальных вершин они – чётные.

З а м е ч а н и е 12.2 Понятно, что наличие петель в мульти-графе никак не сказывается на возможности построения эйлерова обхода – просто нужно, попав в очередную вершину, при попытке совершить обход сразу же пройтись по всем петлям данной вершины. Именно поэтому и принято при подсчёте степени вершины каждую петлю считать за два ребра, кроме того это же позволяет более кратко сформулировать и многие другие утверждения о мульти-графах – см. например, теорему 11.2.

12.1.2 Близким по смыслу к эйлерову циклу является понятие *г а м и л ь т о н о в о г о* графа. *Г а м и л ь т о н о в ы м ц и к л о м* (или *о б х о д о м*) в графе называется цикл (обход), проходящий через каждую вершину графа в точности по одному разу, за исключением начальной (по некоторым рёбрам можно при этом ни разу не проходить). Несмотря на внешнее сходство с задачей об эйлеровом цикле, задача о том, что данный граф обладает гамильтоновым циклом намного сложнее. До сих пор найдено лишь несколько достаточных и ещё меньше необходимых признаков для графа быть гамильтоновым, хотя активные поиски этого активно ведутся по всему миру.

П р и м е р 12.2 Граф G_6 с рисунка 12.1 – гамильтонов: C_1-C_2-C_3-C_4-C_5-C_6-C_1 – нужный циклический обход.

З а м е ч а н и е 12.3 Очевидно, что параллельные рёбра и петли никоим образом не могут помочь построению гамильтонова обхода, по этой причине в этом пункте рассматриваются только лишь простые графы.

Т е о р е м а 12.2 (достаточные признаки быть гамильтоновым)

Пусть в обыкновенном связном графе G имеется n вершин.

а). (Оре). Если сумма степеней любой пары вершин не меньше чем n и $n \geq 3$, то данный граф имеет гамильтонов цикл.

б). (Дирак). Если степень каждой вершины графа не менее $n/2$ и $n \geq 3$, то граф обладает гамильтоновым циклом.

в). (Хватал) Пусть $(d_1,d_2,\ldots,d_n)$ – вектор степеней графа G, причём $2 \leq d_1 \leq d_2 \leq \ldots \leq d_n$ и для всякого k такого, что $1 \leq k < n/2$ и $d_k \leq k$, выполнено неравенство $d_{n-k} \geq n-k$, тогда граф G – гамильтонов цикл.

П р и м е р 12.3 Рассмотрим граф C_n, состоящий из одного простого цикла длины n, например, такой граф при $n=5$ изображён на рисунке 12.3. Ясно, что при достаточно больших n, к примеру, не меньше чем пять, ни одно из условий теоремы 12.2 для графа C_n не выполняется. Действительно, степень каждой его вершины равна двум, что меньше $5 \leq n$, значит условие теоремы

Дирака не верно. Сумма степеней любых двух вершин графа равна четырём, поэтому не выполнены условия теорем Оре и Хватала. Но, тем не менее, граф C_n гамильтонов при всяком n. Этот пример явно показывает, что все три утверждения теоремы 12.2 работают строго в одну сторону, в отличие от утверждений теоремы 12.1.

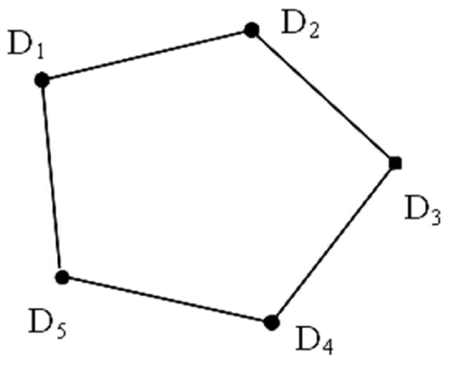


Рисунок 12.3 – Простой цикл C_5

Явно не гамильтоновыми циклами являются графы с *висячими* вершинами, т.е. вершинами степени один. Так же понятно, что граф, изображённый на рисунке 12.4, не имеет гамильтонова цикла. Графы, полученные из него посредством *подразделения* рёбер, т.е. добавлением вершин степени два (см. также подраздел 12.2 и рисунок 12.7), образно называются *тэтта-графами*. Отсюда получается

Теорема 12.3 *Если граф содержит тэтта-подграф, то он – не гамильтонов цикл.*

С другой стороны, для некоторых классов графов это условие также и необходимое.

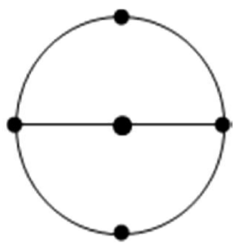


Рисунок 12.4 – Наименьший тэтта-граф

Теорема 12.4 *Всякий не гамильтонов двусвязный граф содержит тэтта-подграф.*

Напомним (см. п. 11.1.2), что двусвязными называются такие графы, у которых необходимо удалить минимум три вершины для того, чтобы нарушилась их связность.

Во многих простых случаях этих двух признаков, что сформулированы в теореме 12.3 и перед ней, вполне достаточно для обоснования того, что граф не гамильтонов. Однако в целом это весьма сложная задача. С другой стороны, если Вы сумели по чертежу увидеть гамильтонов обход, то нет смысла использовать теорему 12.2, – достаточно просто указать этот цикл.

12.2 Плоские и планарные графы

Граф называется *плоским*, если он *уложен на плоскость*, т.е. изображён на плоскости так, что его рёбра пересекаются только в вершинах. Хотя здесь лучше сказать, что мы имеем плоское изображение или плоскую *диаграмму* графа. Говорят, что граф *планарный*, если у него имеется плоское изображение.

Замечание 12.4 Определение плоского графа использует его рисунок в явном виде. Пожалуй, это единственный пример такого рода в теории графов. Все остальные определения, могут быть достаточно просто даны без использования изображений (диаграмм) графа, а с применением матричных или иных представлений, описанных в подразделе 11.3. Другое дело, что нет смысла сразу переходить на абстрактное, аналитическое определение – мы же не машины. Тем более что основная прелесть применения теории графов в различных приложениях кроется именно в возможности оперировать относительно простыми и наглядными геометрическими образами.

П р и м е р ы 12.5 Графы, изображённые на рисунках 11.5, 12.1, 12.3 и 12.4 – плоские, граф на рисунке 11.3 – планарный, хотя и не плоский, так как он имеет изоморфное плоское изображение, а именно, граф G_3 с рисунка 11.4. А вот граф G_1 с рисунка 11.2, также как и G_7 с рисунка 12.5, не только не плоский – он не является даже планарным, это можно усмотреть из нижеследующей теоремы 12.5.

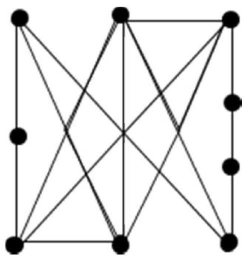


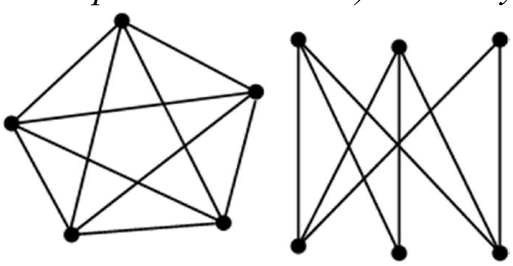
Рисунок 12.5 – граф G_7

У п р а ж н е н и е 12.3 *Постройте плоское изображение для графа* $\overline{G}_4$ *с рисунка 11.6.*

Т е о р е м а 12.5 (критерии планарности графа) *Граф не является планарным (т.е. его нельзя изобразить плоским) тогда и только тогда, когда выполнено любое из следующих условий:*

а) (Понтрягина-Куратовского) Граф содержит подграф гомеоморфный (см. определение ниже) полному пятивершиннику K_5 *или графу* $K_{3,3}$*. Эти графы изображены на рисунке 12.6.*

б) (Харари-Татта) Граф можно посредством стягивания рёбер (см. ниже определение) и удаления некоторых элементов превратить в граф гомеоморфный K_5 *или* $K_{3,3}$*.*



K_5 $K_{3,3}$

Рисунок 12.6 – Минимальные не планарные графы

З а м е ч а н и е 12.5 Граф K_5 иногда называют пентаграммой, а граф $K_{3,3}$ – графом из задачи о трёх колодцах.

Графы называются *г о м е о м о р ф - н ы м и* если один получается из другого применением нескольких операций *с к л е и в а н и я* или *п о д р а з д е л е н и я* рёбер. На рисунке 12.7 схематично изображено действие этих взаимно обратных операций. При склеивании вместо двух рёбер AC и CB получается одно ребро AB, при условии, что вершина A имеет степень 2. А при подразделении ребра AB добавляется новая вершина C, которая делит это ребро.

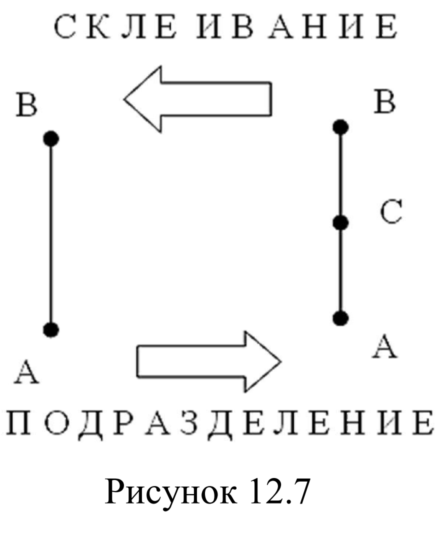


Рисунок 12.7

Упражнение 12.4 *Докажите, что упомянутые выше графы G_1 с рисунка 11.2 и G_7 с рисунка 12.5 действительно не планарные. Указание: воспользуйтесь критерием Понтрягина-Куратовского.*

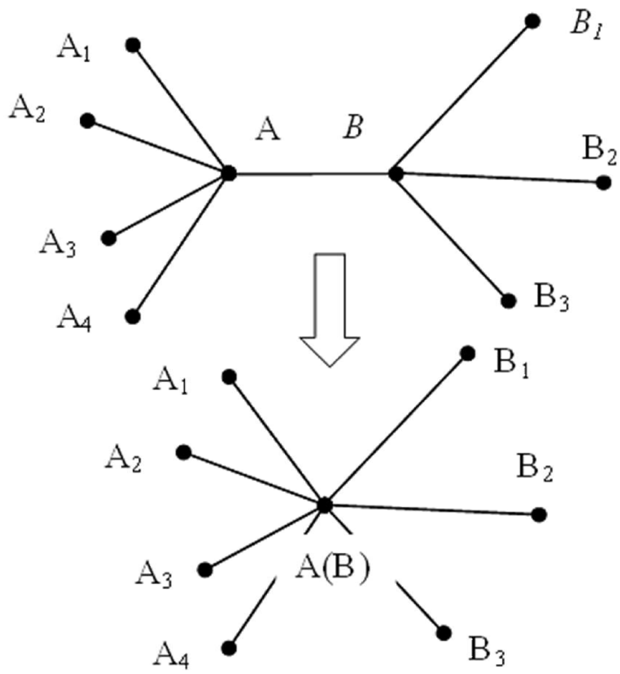


Рисунок 12.8

Операция *стягивания* ребра AB состоит в том, что ребро AB удаляется, вершины A и B отождествляются в одну, и эта новая вершина соединяется рёбрами со всеми вершинами, которые были смежными с вершиной A или с B (см. рисунок 12.8). Таким образом, степень этой новой «склеенной» вершины равна сумме степеней вершин A и B.

Упражнение 12.5 *Опишите, что происходит с вектором степеней графа, когда применяются операции склеивания, подразделения и стягивания рёбер.*

12.3 Деревья. Их характеризация

12.3.1 *Дерево* – это связный граф без циклов. Деревья особенно часто возникают на практике при изображении различных иерархий. Точнее при изображении неполной диаграммы частичного порядка, когда рисуют не все рёбра, а только непосредственного старшинства, при этом подразумевается продолжение по транзитивности: «все начальники моего начальника – они и мои начальники». Сравните это с полной диаграммой бинарного отношения из п. 2.2.5.

Наличие в графе циклов очень часто помогает обнаружить его *цикломатическое число*, разумеется, что Вы работаете при этом не с чертежом графа. Оно относительно просто высчитывается: $\lambda(G) = m - n + k$, здесь m – количество рёбер в графе, n – число вершин, k – число компонент связности.

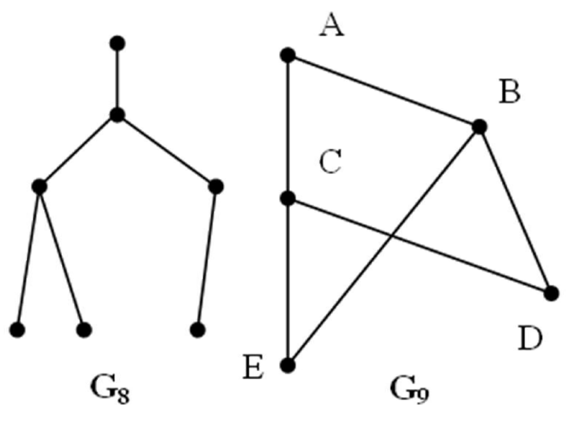


Рисунок 12.9

Примеры 12.6 У графа G_7, изображённого на рисунке 12.5 цикломатическое число равно $\lambda(G_7)$ = 14 – 9 + 1 = 6, поскольку ввиду связности графа у него лишь одна компонента связности. У графа с рисунка 12.9 – две компоненты связности: подграфы G_8 и G_9, поэтому его цикломатическое число равно: (6 + 6) – (7 + 5) + 2 = 2. Если каждую компоненту связности рассматривать как самостоятельный граф, то $\lambda(G_8) = 6 - 7 + 1 = 0$, $\lambda(G_9) = 6 - 5 + 1 = 2$.

Заметим, что G_8 является деревом. Следующая теорема объясняет, что равенство $\lambda(G_8) = 0$ получилось не случайно.

Т е о р е м а 12.6 *Цикломатическое число любого графа – величина не отрицательная, причём оно равно нулю тогда и только тогда, когда граф не имеет циклов.*

З а м е ч а н и е - у п р а ж н е н и е 12.6 В графе G_9 имеется не два цикла, а больше: 1) *A-B-D-C-A; 2) A-C-E-B-A; 3) B-D-C-E-B*. Кроме этих трёх простых циклов длины 4, в которых не повторяются ни рёбра, ни вершины, имеются ещё и составные, к примеру, *A-B-D-C-E-B-A*. Какой же тогда смысл в равенстве $\lambda(G_9) = 2$?

12.3.2 Следующие свойства деревьев часто бывают полезны на практике.

Т е о р е м а 12.7 (критерии свойства графа быть деревом)
Эквивалентные определения дерева с N вершинами.
а) Граф содержит $N - 1$ ребро и не имеет циклов.
б) Граф – связный и содержит $N - 1$ ребро.
в) Граф – связный и удаление любого ребра делает его несвязным.
г) Любая пара вершин соединяется единственной цепью (путём).
д) Граф не имеет циклов, и добавление одного ребра между любыми двумя вершинами приводит к появлению одного и только одного цикла.

К а р к а с о м связного графа (или *о с т о в о м*, или *о с т о в н ы м д е р е в о м*) называется его подграф, который содержит все вершины графа и является деревом. При указании каркаса обычно перечисляют рёбра его составляющие. Например, в графе G_9 с рисунка 12.9 каркасом является дерево (*AB*), (*BD*), (*DC*), (*BE*). Нетрудно увидеть, что в одном и том же графе может быть несколько каркасов.

12.4 Раскраски графов

Некоторые важные для практики задачи (о составлении расписания, о распределении оборудования [1,2,4-10,13,17,18,24,26] и др.) сводятся к раскраске вершин и/или рёбер графа.

12.4.1 Мы рассмотрим лишь *п р а в и л ь н ы е в е р ш и н н ы е р а с - к р а с к и*, т.е. такие в которых любые смежные вершины графа выкрашены в разные цвета. Всюду далее такие раскраски для краткости будем называть просто раскрасками.

П р и м е р 12.7 Граф G_9 на рисунке 12.9 можно раскрасить в три цвета: вершины A, E и D выкрасим в один цвет, а вершины B и C – в другой. При этом третий цвет остался незадействованным. Таким образом, можно сказать, что граф G_9 является и 2-раскрашиваемым и 3-раскрашиваемым.

Минимальное число k, при котором граф G является k-раскрашиваемым, называется *хроматическим числом* этого графа и обозначается $\chi(G)$. (читается «хи от гэ» или «хи от джи»)

В общем случае задача о нахождении хроматического числа очень трудная. Однако при небольшом количестве вершин (до десяти) это обычно делается «вручную» без особого напряжения. Например, мы произвели конкретную раскраску графа G_9 в два цвета, понятно, что любой не пустой граф, т.е. граф, имеющий хоть одно ребро, менее чем в два цвета правильно раскрасить нельзя. Следовательно, $\chi(G_9) = 2$. В других случаях, после того как указана конкретная раскраска, и не видно каким образом можно уменьшить количество цветов, нужно обосновать, что получена минимальная раскраска. При этом помогают следующие факты:

Теорема 12.8 *1) хроматическое число полного графа K_n с n вершинами равно n; 2) хроматическое число графа, который получается из полного K_n удалением одного ребра равно $n - 1$; 3) хроматическое число простого цикла C_n с чётным количеством вершин равно 2, а с нечётным – 3; 4) хроматическое число всего графа не меньше хроматического числа любого его подграфа.*

Упражнение 12.7 *Докажите или хотя бы обоснуйте эти факты.*

Если Вы сумели, допустим, раскрасить Ваш граф в 4 цвета и обнаружили в нём подграф K_4 (четырёхугольник с проведёнными в нём диагоналями), то хроматическое число Вашего графа равно 4 на основании теоремы 12.8.1.

12.4.2 Также весьма полезными бывают следующие оценки хроматического числа.

Теорема 12.9 *Пусть $\Delta(G)$ означает наибольшую из степеней вершин графа G. Тогда верны неравенства:*

а) $\chi(G) \le 1 + \Delta(G)$; б) (Брукс) если G – связный не полный граф и $\Delta(G) \ge 3$, то $\chi(G) \le \Delta(G)$.

Граф бихроматический (или *двудольный* граф, граф *Кёнига*) – это 2-хроматический (2-раскрашиваемый и не пустой) граф. Граф называется *полным двудольным*, если любые его вершины, взятые из разных долей – смежные. Обозначается $K_{m,n}$, где $m = |X_1|$, $n = |X_2|$ – количества вершин в долях X_1 и X_2, соответственно. Число рёбер в нём равно $m \cdot n$.

Упражнение 12.7 *Докажите, что свойство графа быть бихроматическим эквивалентно любому из следующих свойств: а) граф, не содержит циклов нечетной длины; б) множество вершин графа можно разбить на две части X_1 и X_2 так, любые две вершины, взятые из одной и той же части X_i между собой не смежны).*